UNIVERZITET U NIŠU

FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU

OSNOVI MAŠINSTVA

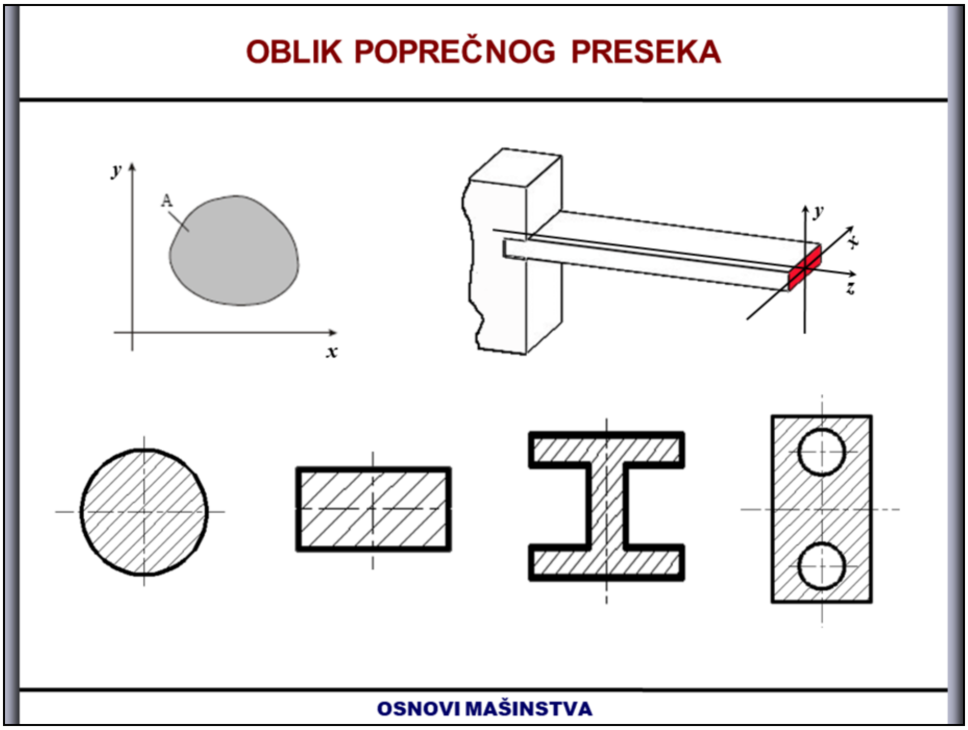
- PREZENTACIJA BR. 11 -

Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.

SADRŽAJ PREZENTACIJE

GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNIH PRESEKA

- Površina poprečnog preseka;
- Statički moment poprečnog preseka;
  - Promena statičkih momenata poprečnog preseka pri translaciji koordinatnog sistema;
  - Statički momenti poprečnog preseka za težišne ose;
- Momenti inercije poprečnog preseka;
  - Promena momenata inercije poprečnog preseka pri translaciji koordinatnog sistema – Štajnerova teorema;
  - Izračunavanje momenata inercije jednostavnih preseka;
  - Izračunavanje momenata inercije složenih preseka;



Poprečni presek štapa ili grede je definisan zatvorenom linijom u ravni normalnoj na uzdužnu osu nosača (slika gore levo).

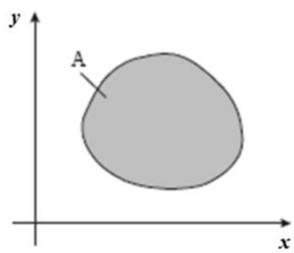
Poprečni presek predstavlja geometrijsku figuru (sliku) površine A [m^2] u presečnoj ravni koja je normalna na uzdužnu osu štapa ili grede (slika gore desno).

Poprečni preseci štapa su u praksi pravilne figure sastavljene iz definisanih geometrijskih oblika (donji red slika).

KARAKTERISTIKE POPREČNOG PRESEKA

Osnovne karakteristike poprečnog preseka nosača:

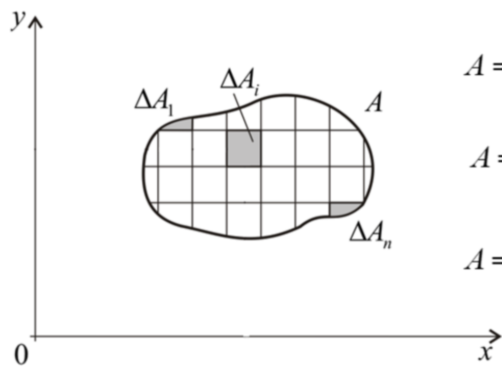
1. **Površina poprečnog preseka;**
2. **Statički moment poprečnog preseka;**
3. **Momenti inercije poprečnog preseka.**



Osnovne karakteristike ravnog poprečnog preseka jednog nosača čine:

1. Površina poprečnog preseka;
2. Statički moment poprečnog preseka i
3. Momenti inercije poprečnog preseka.

Površina poprečnog preseka



$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots\ldots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

$$A = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \int_A dA$$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

OSNOVI MAŠINSTVA

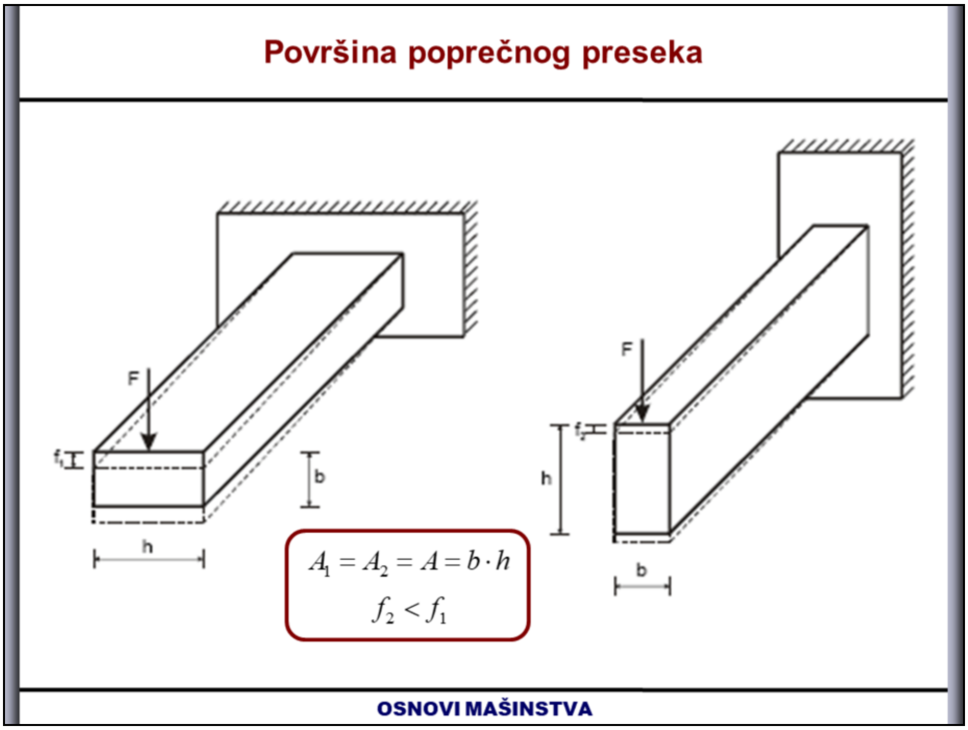
Površina je najjednostavnija karakteristika poprebnog preseka.

Približna vrednost površine zadatog poprečnog preseka može da se odredi sabiranjem površina elementarnih površi na koje se deli dati presek.

Tačna vrednost površine se određuje integraljenjem, kada je elementarna površ beskonačno mala, a broj elementarnih površi teži beskonačnosti.

Za složeni oblik poprečnog preseka, koji se sastoji iz više prostih oblika (pravougaonik, trougao, krug), površina poprečnog preseka jednaka je zbiru pojedinih površina.

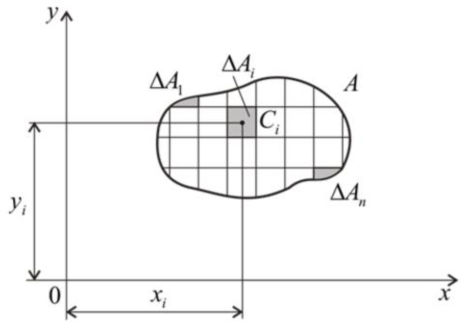
Dimenzija površine je [L^2], a meri se jedinicama [m^2] ili [cm^2].



Dva štapa jednakih površina poprečnog preseka $A=b\cdot h$, opterećena jednakim silama na savijanje, deformišu se različito.

Zbog toga se koriste složenije geometrijske karakteristike ravnog preseka, kao što su statički moment poprečnog preseka i momenti inercije poprečnog preseka.

Statički momenti poprečnog preseka



$$S_x = y_1\Delta A_1 + ... + y_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i$$

$$S_x = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta A_i =$$

$$= \int_1 ydA + \int_2 ydA + ... + \int_n ydA = \int_A ydA$$

$$S_x = y_1A_1 + y_2A_2 + ... + y_nA_n = \sum_{i=1}^{n} y_iA_i$$

$$S_y = x_1\Delta A_1 + ... + x_n\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i$$

$$S_y = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta A_i = \int_1 xdA + \int_2 xdA + ... + \int_n xdA = \int_A xdA$$

$$S_y = x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = \sum_{i=1}^{n} x_iA_i$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Približna vrednost statičkog momenta poprečnog preseka za osu u ravni je definisana kao zbir proizvoda elementarnih površina i normalnog rastojanja težišta te elementarne površi od ose.

Tačna vrednost statičkog momenta poprečnog preseka za osu u ravni jednaka je graničnoj vrednosti izraza za srednju vrednost statičkog momenta poprečnog preseka kada je elementarna površina beskonačno mala (teži nuli), a broj elementarnih površi tom prilikom teži beskonačnosti.

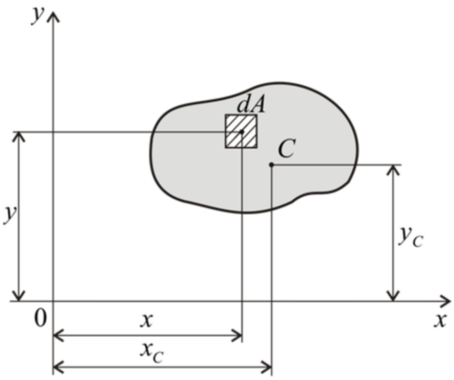
Statički moment poprečnog preseka (*moment površine prvog reda*) za osu u ravni jednak je određenom integralu po datoj površini proizvoda normalnog rastojanja ma koje tačke elementarne površi od izabrane ose i te elementarne površine.

Dimenzija statičkog momenta je [L^3], a meri se jedinicom [cm^3].

Za složeni oblik poprečnog preseka koji se sastoji iz više prostih oblika (pravougaonik, trougao, krug), statički moment za neku osu jednak je zbiru statičkih momenata pojedinih prostih površina u odnosu na istu osu.

Statički momenti poprečnog preseka

Veza između statičkih momenata i koordinata težišta poprečnog preseka



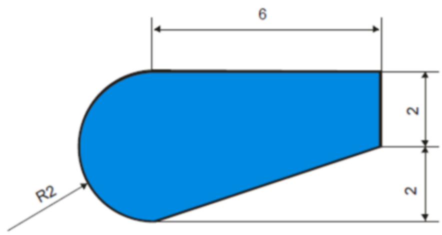
$$x_C = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = x_C \cdot A$$

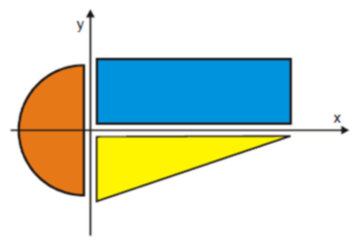
$$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A} \Rightarrow S_x = y_C \cdot A$$

Izrazi za određivanje koordinata težišta ravnih površi je moguće napisati na osnovu definicije statičkog momenta poprečnog preseka u obliku kako je to prikazano na slajdu.

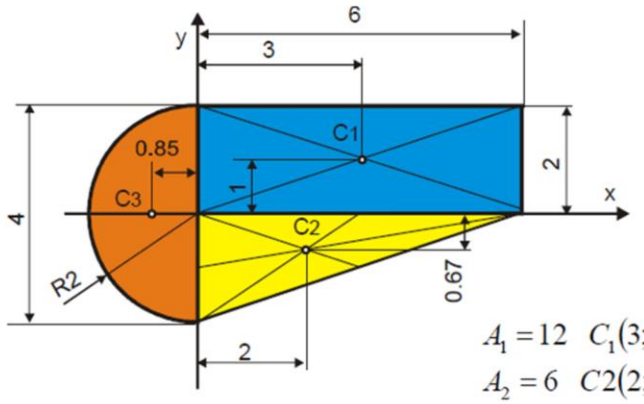
Statički momenti poprečnog preseka

Primer: preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs)





Statički momenti poprečnog preseka



$$A_1 = 12 \quad C_1(3;1)$$

$$A_2 = 6 \quad C2(2;-0.67)$$

$$A_3 = 6{,}28 \quad C_1(-0.85;0)$$

Otpornost materijala (vts.edu.rs)

Statički momenti poprečnog preseka

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 12 + 6 + 6.28 = 24,28\ cm^2$$

$$S_{x1} = A_1 y_1 = 12 \cdot 1 = 12\, cm^3$$

$$S_{x2} = A_2 y_2 = 6 \cdot (-0.67) = -4.02\, cm^3$$

$$S_{x3} = A_3 y_3 = 6.28 \cdot 0 = 0\, cm^3$$

$$S_{y1} = A_1 x_1 = 12 \cdot 3 = 36\, cm^3$$

$$S_{y2} = A_2 x_2 = 6 \cdot 2 = 12\ cm^3$$

$$S_{y3} = A_3 x_3 = 6.28 \cdot (-0.85) = -5.34\, cm^3$$

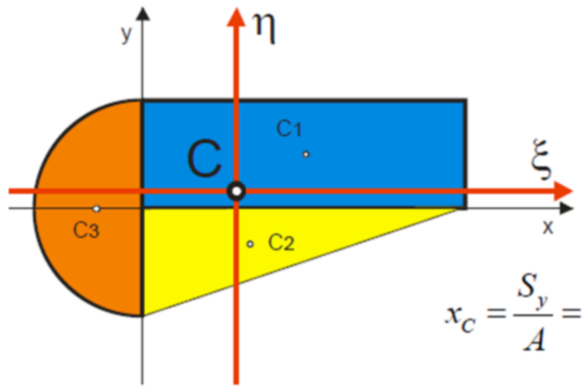
$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} = 12 - 4.02 + 0 = 7.98\, cm^3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = 36 + 12 - 5.34 = 42.66\, cm^3$$

Otpornost materijala (vts.edu.rs)

OSNOVI MAŠINSTVA

Statički momenti poprečnog preseka



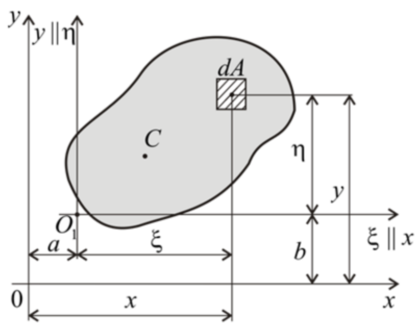
$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{42.66}{24.28} = 1.75\,cm$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{7.98}{24.28} = 0.32\,cm$$

Otpornost materijala (vts.edu.rs)

Statički momenti poprečnog preseka

Statički momenti poprečnog preseka za paralelne ose (Promena statičkih momenata poprečnog preseka pri translaciji koordinatnog sistema)



$$\underbrace{S_x = \int_A y\,dA; \quad S_\xi = \int_A \eta\,dA; \quad y = \eta + b;}$$

$$\boxed{S_x = \int_A (\eta + b)\,dA = S_\xi + bA}$$

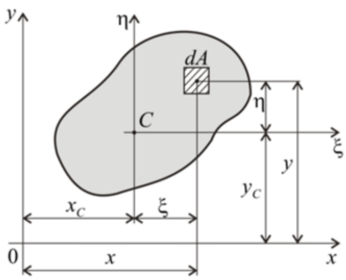
$$\underbrace{S_y = \int_A x\,dA; \quad S_\eta = \int_A \xi\,dA; \quad x = \xi + a;}$$

$$\boxed{S_y = \int_A (\xi + a)\,dA = S_\eta + aA}$$

Statički moment poprečnog preseka u odnosu na neku osu jednak je zbiru statičkog momenta u odnosu na paralelnu osu i proizvoda površine i normalnog rastojanja između osa.

Statički momenti poprečnog preseka

Statički momenti poprečnog preseka za težišne ose



$$b = y_C$$

$$S_x = \int_A (\eta + b)\,dA = \int_A (\eta + y_C)\,dA = S_\xi + \underbrace{y_C A}_{S_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_\xi = 0;$$

$$a = x_C$$

$$S_y = \int_A (\xi + a)\,dA = \int_A (\xi + x_C)\,dA = S_\eta + \underbrace{x_C A}_{S_y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_\eta = 0;$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Osa koja prolazi kroz težište površi zove se težišna, centralna ili sopstvena osa.

Za ose translatorno pomerenog koordinatnog sistema $0\xi\eta$, koje prolaze kroz težište *C* ravnog preseka čija je površina *A*, važi da je $b=y_C$ i $a=x_C$.

Na osnovu prethodne analize, zaključuje se da su statički momenti poprečnog preseka za težišne ose jednaki nuli.

Ukoliko je poprečni presek osnosimetričan, statički moment poprečnog preseka jednak je nuli jer osa simetrije prolazi kroz težište preseka.

Momenti inercije poprečnog preseka

Vrste momenata inercije ravnih površi:

- **Aksijalni momenti inercije,**
- **Centrifugalni moment inercije,**
- **Polarni moment inercije.**

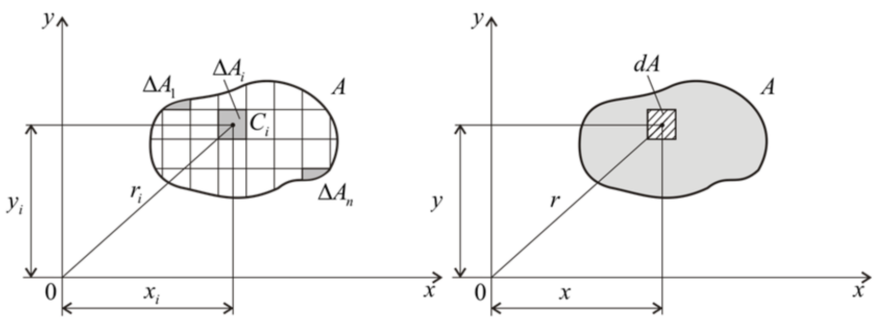
OSNOVI MAŠINSTVA

Momenti inercije ravnih površina su *momenti površine drugog reda*.

Dimenzija aksijalnih momenata inercije je [L^4], a mere se jedinicom [cm^4].

Momenti inercije poprečnog preseka

Aksijalni momenti inercije poprečnog preseka



$$I_x = y_1^2\Delta A_1 + \dots + y_n^2\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\Delta A_i;\; I_x = \lim_{\substack{\Delta A_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} y_i^2\Delta A_i = \int_A y^2 dA;\; I_x > 0;$$

$$I_y = x_1^2\Delta A_1 + \dots + x_n^2\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta A_i;\; I_y = \lim_{\substack{\Delta A_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta A_i = \int_A x^2 dA;\; I_y > 0;$$

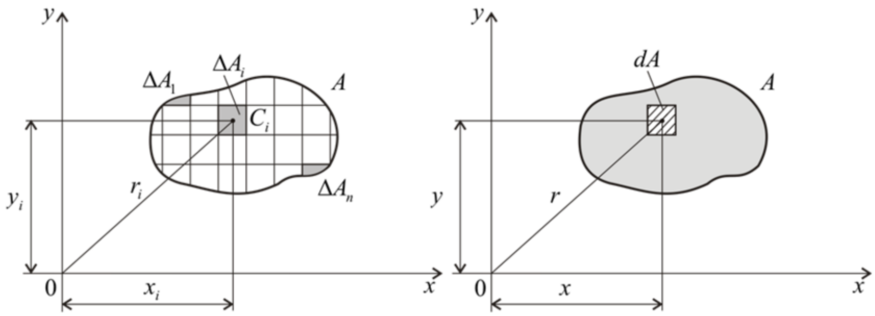
OSNOVI MAŠINSTVA

Za ravan poprečni presek površine *A*, koji je podeljen na konačan broj elementarnih površi ΔA_i i za koji je uzeta elementarna površina *dA*, definicije momenata inercije u približnom obliku, a zatim i u tačnom obliku po primeni graničnih vrednosti na prethodni oblik, date su u prvom redu za osu x, a u drugom redu za osu y.

Aksijalni (osni ili ekvatorijalni) moment inercije poprečnog preseka površine A za neku osu jednak je zbiru proizvoda kvadrata rastojanja ma koje tačke elementarne površine od te ose i elementarne površine, tj. jednak je određenom integralu po datoj površini proizvoda kvadrata normalnog rastojanja ma koje tačke elementarne površi od izabrane ose i te elementarne površine.

Momenti inercije poprečnog preseka

Centrifugalni moment inercije poprečnog preseka



$$I_{xy} = x_1 y_1 \Delta A_1 + \dots\dots + x_n y_n \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Delta A_i \,;$$

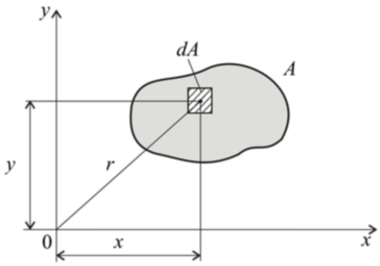
$$I_{xy} = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Delta A_i = \int_A xy\,dA; \quad I_{xy} \gtrless 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Centrifugalni moment inercije ravne površi za par uzajamno upravnih osa jednak je zbiru proizvoda normalnih rastojanja ma koje tačke elementarne površi od tih osa i elementarne površine, tj. jednak je određenom integralu po datoj površini proizvoda normalnih rastojanja ma koje tačke elementarne površi od izabranih osa i te elementarne površine.

Momenti inercije poprečnog preseka

Polarni moment inercije poprečnog preseka



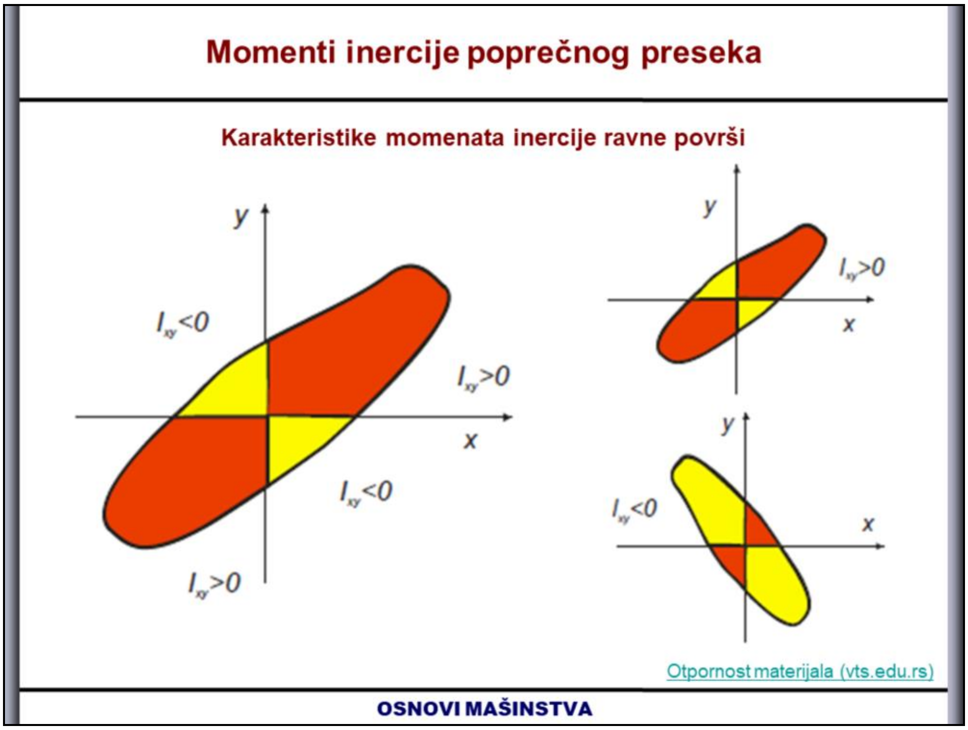
$$I_0 = r_1^2 \Delta A_1 + ... + r_n^2 \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta A_i \ ;$$

$$I_0 = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta A_i = \int_A r^2 dA;$$

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y; \quad I_0 > 0.$$

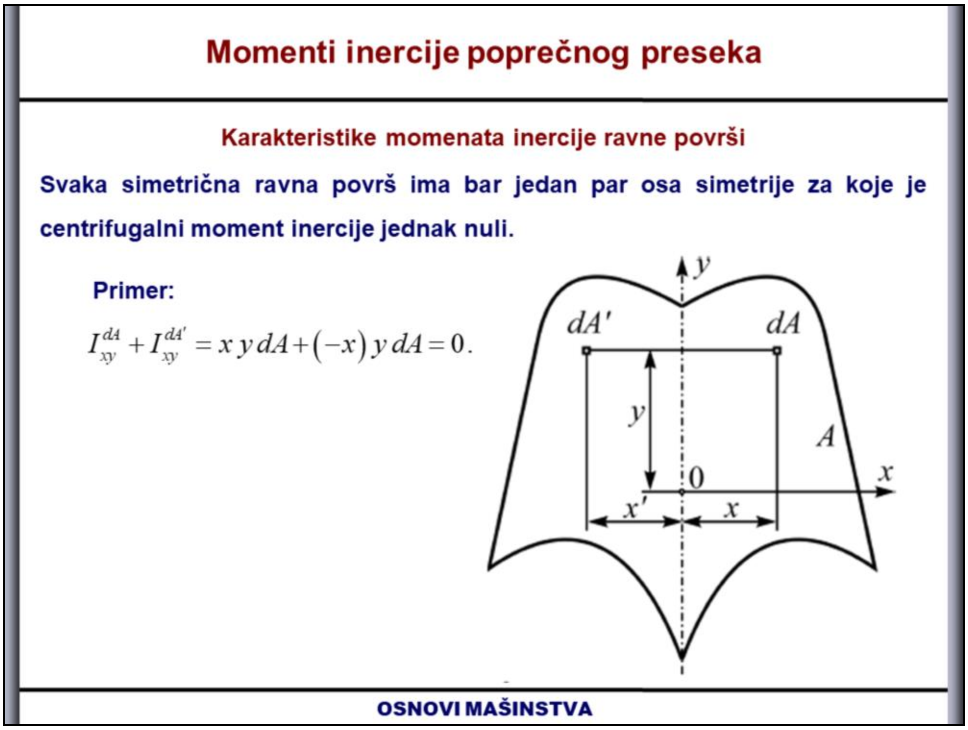
Polarni moment inercije ravne površi za neku tačku (pol) jednak je zbiru proizvoda kvadrata rastojanja ma koje tačke elementarne površi od te tačke i elementarne površine, tj. jednak je određenom integralu po datoj površini proizvoda kvadrata rastojanja ma koje tačke elementarne površi od izabrane tačke i te elementarne površine.

Između vrednosti aksijalnih momenata inercije za dve uzajamno upravne ose i polarnog momenta inercije za tačku preseka ovih osa postoji veza: kako je $r^2 = x^2 + y^2$, polarni moment inercije jednak je zbiru aksijalnih momenata inercije za dve uzajamno upravne ose koje se seku u polu.



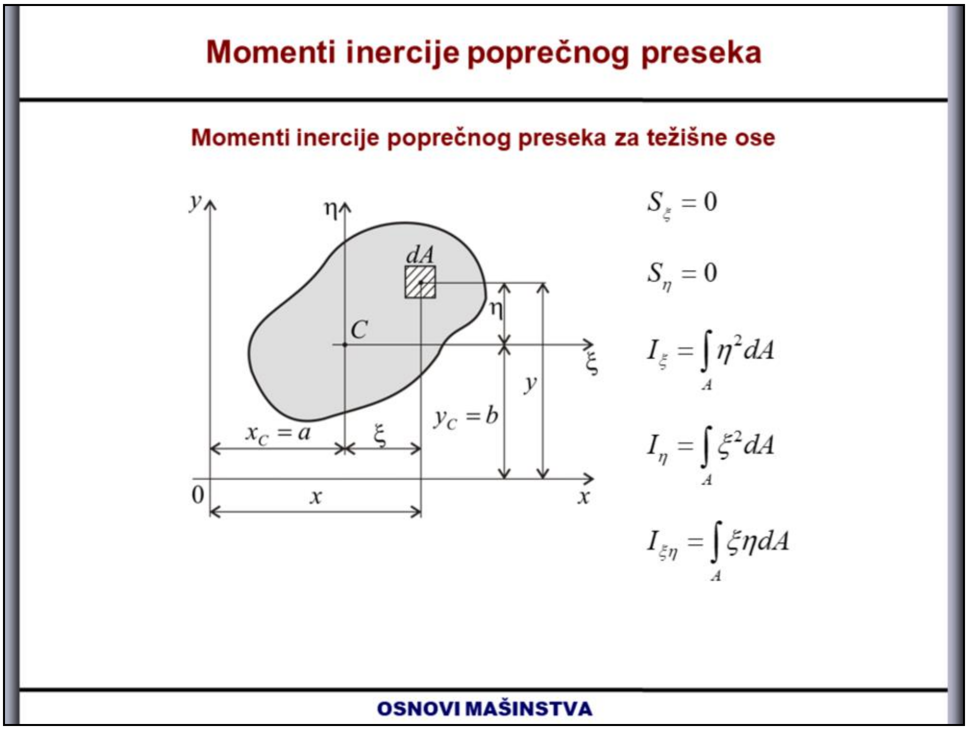
Aksijalni i polarni moment inercije ravne površi imaju uvek pozitivne vrednosti, jer su elementarne površine i kvadrati rastojanja od osa ili pola uvek pozitivne vrednosti.

Vrednost centrifugalnog momenta inercije može da bude veća od nule (pozitivna), manja od nule (negativna) ili jednaka nuli, što zavisi od znaka koordinata težišta elementa površi *dA*: za površi u prvom i trećem kvadrantu su vrednosti centrifugalnog momenta inercije pozitivne jer su koordinate istog znaka, a za površi u drugom i četvrtom kvadrantu su negativne jer su koordinate različitog znaka.



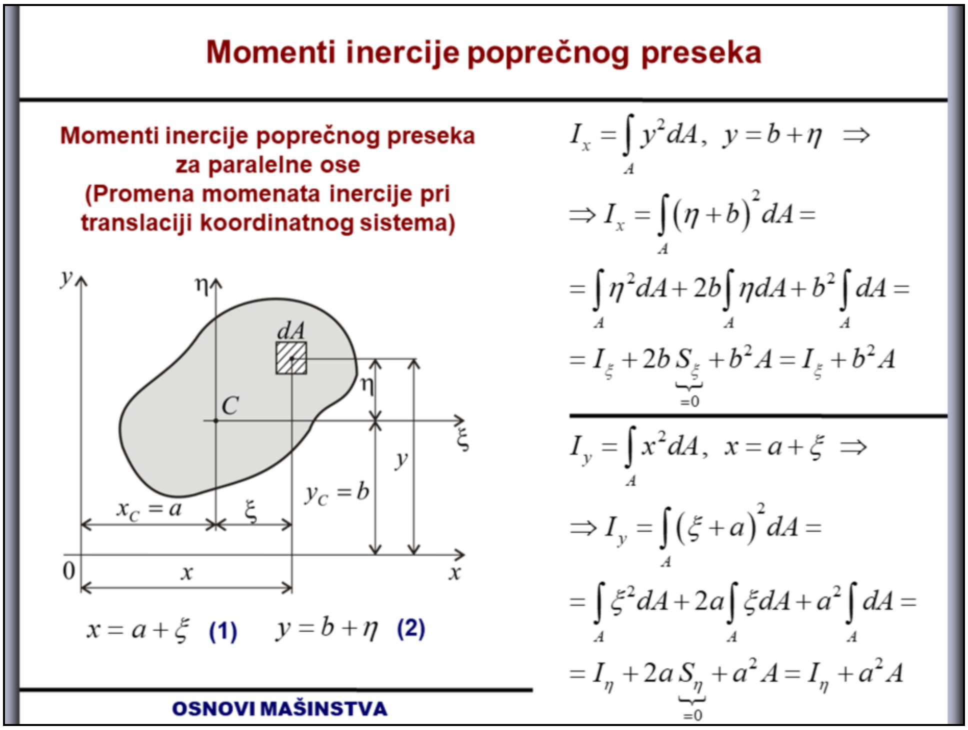
Svaka simetrična ravna površ ima bar jedan par osa simetrije za koje je centrifugalni moment inercije jednak nuli.

Primer pokazuje da svakoj elementarnoj površi *dA* desno od ose y odgovara ista takva, kao slika u ogledalu, elementarna površ *dA'* levo od ose y (*x'*=-*x*). Zbirni centrifugalni moment inercije ove dve elementarne površi mora da bude jednak nuli.



Na slajdu su prikazani izrazi za momente inercije poprečnog preseka za ose translatorno pomerenog koordinatnog sistema $0\xi\eta$, koje prolaze kroz težište *C* poprečnog preseka čija je površina *A*.

Ako osa prolazi kroz težište *C* poprečnog preseka, statički moment površi za tu osu jednak je nuli.



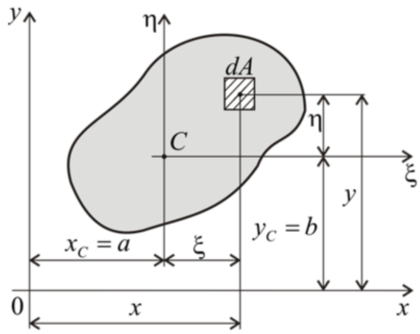
Štajnerova teorema se odnosi na dva koordinatna sistema sa paralelnim osama ($0xy$ i $C\xi\eta$), od kojih jedan koordinatni sistem mora da ima koordinatni početak u težištu C ravnog preseka. Ose ξ i η predstavljaju težišne ose površine poprečnog preseka.

Ako se koordinatni sistem $0xy$ translatorno pomeri do položaja $C\xi\eta$, gde je C ($x_C=a$; $y_C=b$) težište posmatranog ravnog (poprečnog) preseka površine A, onda nastala transformacija koordinata ma koje tačke elementarne površi dA može da se napiše u obliku izraza (1) i (2).

Matematički iskaz Štajnerove teoreme za aksijalne momente inercije poprečnog preseka je postupno izložen na slajdu.

Momenti inercije poprečnog preseka

Momenti inercije poprečnog preseka za paralelne ose
(Promena momenata inercije pri translaciji koordinatnog sistema)



$$I_{xy} = \int_A xy\,dA,\quad x = a+\xi,\quad y = b+\eta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{xy} = \int_A (\eta+b)(\xi+a)\,dA =$$

$$= \int_A \xi\eta\,dA + a\int_A \eta\,dA + b\int_A \xi\,dA + ab\int_A dA =$$

$$= I_{\xi\eta} + a\underbrace{S_\xi}_{=0} + b\underbrace{S_\eta}_{=0} + abA =$$

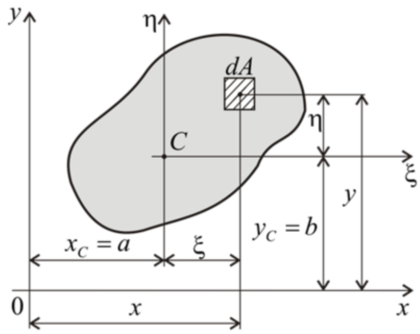
$$= I_{\xi\eta} + abA$$

Na slajdu je dat matematički iskaz Štajnerove teoreme za centrifugalni moment inercije poprečnog preseka.

Koordinate težišta *a* i *b* ulaze sa svojim predznacima, tako da pri translaciji koordinatnog sistema može doći do uvećanja ili smanjenja centrifugalnog momenta inercije.

Momenti inercije poprečnog preseka

Momenti inercije poprečnog preseka za paralelne ose
(Promena momenata inercije pri translaciji koordinatnog sistema)



$$I_x = I_\xi + b^2 A,\ \ I_y = I_\eta + a^2 A;$$

$$I_0 = I_x + I_y =$$

$$= \underbrace{I_\xi + I_\eta}_{I_C} + \underbrace{\left(a^2 + b^2\right)}_{r_C^2} A =$$

$$= I_C + r_C^2 A$$

Na slajdu je dat matematički iskaz Štajnerove teoreme za polarni moment inercije poprečnog preseka.

Momenti inercije poprečnog preseka

Momenti inercije poprečnog preseka za paralelne ose
(Promena momenata inercije pri translaciji koordinatnog sistema)

Sopstveni moment inercije — **Položajni moment inercije**

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_\xi + y_C^2 A \\ I_y &= I_\eta + x_C^2 A \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + x_C y_C A \\ I_0 &= I_C + r_C^2 A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} I_\xi &= I_x - y_C^2 A \\ I_\eta &= I_y - x_C^2 A \\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} - x_C y_C A \\ I_C &= I_0 - r_C^2 A \end{aligned}$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Momenti inercije u odnosu na ose koordinatnog sistema sa početkom u težištu *C* poprečnog preseka: I_ξ, I_η, $I_{\xi\eta}$ i I_C zovu se sopstveni momenti inercije, a drugi sabirci u izrazima: $y_C^2 \cdot A$, $x_C^2 \cdot A$, $x_C \cdot y_C \cdot A$ i $r_C^2 \cdot A$ zovu se položajni momenti inercije.

Na osnovu toga, Štajnerovu teoremu je moguće iskazati na sledeći način:

Moment inercije za osu paralelnu težišnoj jednak je zbiru sopstvenog i položajnog momenta inercije.

Primenom Štajnerove teoreme je moguće sračunati momente inercije za težišne/sopstvene ose, tzv. sopstvene momente inercije, ukoliko su poznati momenti inercije za njima odgovarajuće paralelne ose *x* i *y*.

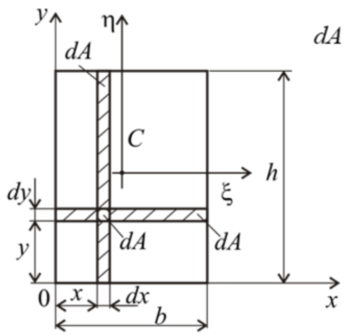
Napomena: rastojanja x_C i y_C treba uzimati sa svojim znakom (+ ili -) prema položaju u odnosu na ose x i y.

Sopstveni aksijalni momenti inercije, a samim tim i sopstveni polarni moment inercije, imaju uvek pozitivne i manje vrednosti u odnosu na odgovarajuće momente inercije za svaku paralelnu osu.

Od svih momenata inercije u odnosu na skup paralelnih osa, najmanju vrednost ima moment inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz težište poprečnog preseka.

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 1. Koordinate težišta i momenti inercije pravougaonika (1/3)



$$dA = b\,dy,\ 0 \le y \le h \ \Rightarrow\ A = \int_{(A)} dA = \int_0^h b\,dy = by\,|_o^h = bh;$$

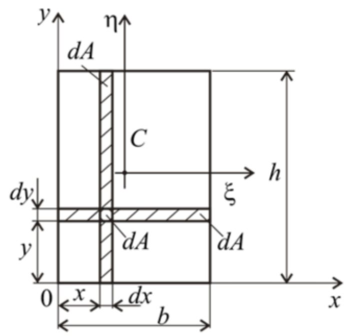
$$x_C = \frac{\int_{(A)} x\,dA}{A} = \frac{\int_0^b x \cdot h\,dx}{bh} = \frac{1}{bh} \cdot h \cdot \frac{x^2}{2}\,|_o^b = \frac{b}{2}$$

$$y_C = \frac{\int_{(A)} y\,dA}{A} = \frac{\int_0^h y \cdot b\,dy}{bh} = \frac{1}{bh} \cdot b \cdot \frac{y^2}{2}\,|_o^h = \frac{h}{2}$$

$$C(x_C, y_C) \equiv C\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 1. Koordinate težišta i momenti inercije pravougaonika (2/3)



$$dA = b\,dy; \quad 0 \le y \le h$$

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^h y^2 b\,dy = b \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$dA = h\,dx; \quad 0 \le x \le b$$

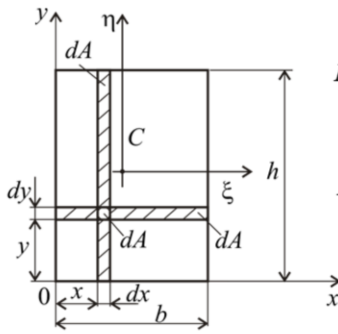
$$I_y = \int_{(A)} x^2 dA = \int_0^b x^2 h\,dx = h \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_o^b = \frac{hb^3}{3}$$

$$0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le h$$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy\,dA = \int_0^b \int_0^h xy\,dx\,dy = \int_0^b x\,dx \int_0^h y\,dy = \frac{x^2}{3}\Big|_0^b \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{b^2h^2}{4}$$

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 1. Koordinate težišta i momenti inercije pravougaonika (3/3)



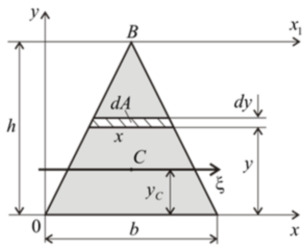
$$I_\xi = I_x - y_C^2 \cdot A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_\eta = I_y - x_C^2 \cdot A = \frac{b^3 h}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{b^3 h}{3} - \frac{b^3 h}{4} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - x_C y_C A = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot bh = 0$$

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 2. Koordinate težišta i aksijalni momenti inercije trougla za ose x, ξ i x_1 (1/2)



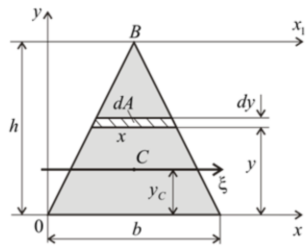
$$dA = x\,dy; \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y) \ ; \quad 0 \le y \le h$$

$$A = \int_{(A)} dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{b}{h}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^h = \frac{bh}{2}$$

$$y_C = \frac{1}{A}\int_{(A)} y\,dA = \frac{1}{A}\int_0^h y \cdot \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{1}{A}\cdot\frac{b}{h}\cdot\int_0^h \left(hy - y^2\right)dy = \frac{1}{\frac{bh}{2}}\cdot\frac{b}{h}\left(h\cdot\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 2. Koordinate težišta i aksijalni momenti inercije trougla za ose x, ξ i x_1 (2/2)



$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right)dy =$$

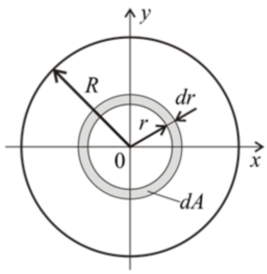
$$= \frac{b}{h}\left(h \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = \frac{b}{h}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_\xi = I_x - y_C^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{x_1} = I_\xi + \left(h - y_C\right)^2 \cdot A = \frac{bh^3}{36} + \left(h - \frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} + \frac{4h^2}{9} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4}$$

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 3. Polarni i aksijalni momenti inercije kružnog preseka



$$dA = 2\pi r dr; \; 0 \le r \le R:$$

$$A = \int_{(A)} dA = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2;$$

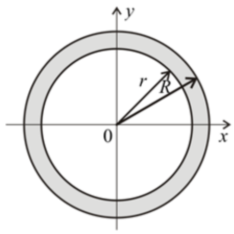
$$I_0 = \int_{(A)} r^2 dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \pi \frac{R^4}{2};$$

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Aksijalni momenti inercije kružnog preseka su zbog osne simetrije jednaki za sve centralne pravce.

Primeri izračunavanja momenata inercije jednostavnih poprečnih preseka

Primer 4. Polarni i aksijalni momenti inercije kružnog prstena



$$\frac{r}{R} = \psi$$

$$A = A_1 - A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \pi R^2 \left(1 - \psi^2 \right)$$

$$I_0 = I_0^{(1)} - I_0^{(2)} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi R^4}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] = \frac{\pi R^4}{2} \left(1 - \psi^4 \right)$$

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^4}{4} \left(1 - \psi^4 \right)$$

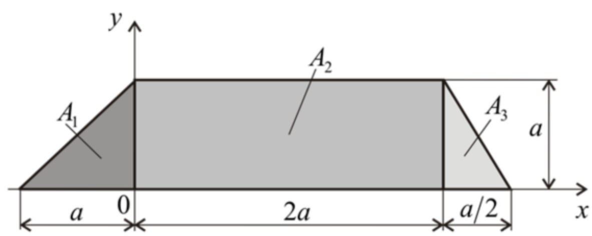
OSNOVI MAŠINSTVA

Aksijalni momenti inercije kružnog prstena su zbog osne simetrije jednaki za sve centralne pravce.

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i;\qquad I_x=\sum_{i=1}^{n}I_x^{(i)};\qquad I_y=\sum_{i=1}^{n}I_y^{(i)};\qquad I_{xy}=\sum_{i=1}^{n}I_{xy}^{(i)};$$

Primer 1. Aksijalni moment inercije za osu *x* složenog porečnog preseka



$$A=A_1+A_2+A_3=\frac{a^2}{2}+2a^2+\frac{a^2}{4};$$

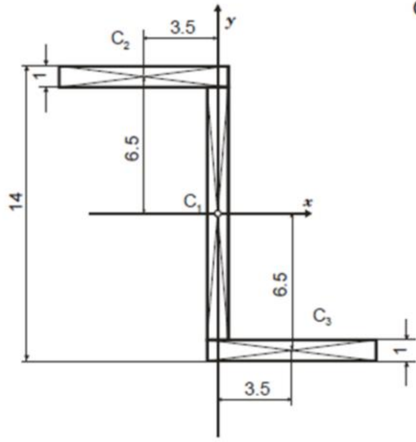
$$I_x=I_x^{(1)}+I_x^{(2)}+I_x^{(3)}=\frac{a\cdot a^3}{12}+\frac{(2a)a^3}{3}+\frac{(a/2)a^3}{12}=\frac{a^4}{12}+\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{24}=\frac{19}{24}a^4.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Momenti inercije složenog ravnog preseka, površine $A=\Sigma A_i$, sračunavaju se kao zbirovi momenata inercije pojedinih delova tog preseka računato u odnosu na istu osu, pol ili par uzajamno upravnih osa.

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 2. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(1/5)**



Odabrati ose x i y i odrediti težište

$A_1 = 12 \cdot 1 = 12;\ \ C_1(0;0),$

$A_2 = 8 \cdot 1 = 8;\ C_2(-3.5;6.5),$

$A_3 = 8 \cdot 1 = 8;\ \ C_3(3.5;-6.5)$

$S_{x1} = 0cm^3,\ S_{y1} = 0cm^3,$

$S_{x2} = -28cm^3,\ \ S_{y2} = 52cm^3$

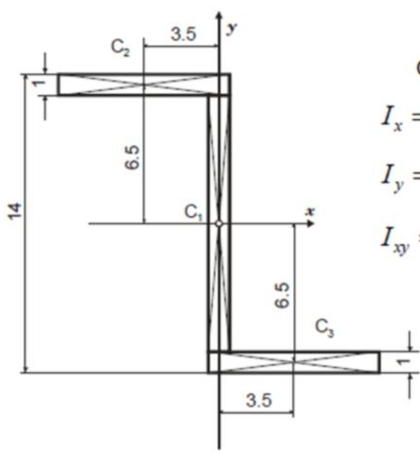
$S_{x3} = 28cm^3,\ \ S_{y3} = -52cm^3$

$$x_C = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0 - 28 + 28}{12 + 8 + 8} = 0$$

$$y_C = \frac{S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0 + 52 - 52}{12 + 8 + 8} = 0$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 2. **preuzeto sa** Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(2/5)**



Odrediti momente inercije za ose x i y

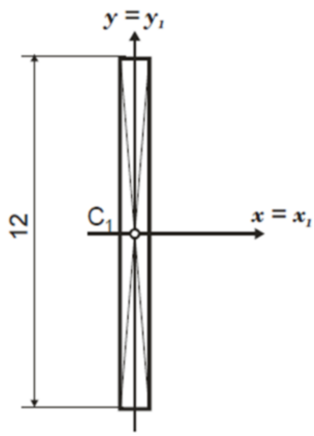
$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + y_{C2}^2 A_2 + I_{x3} + y_{C3}^2 A_3$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + x_{C2}^2 A_2 + I_{y3} + x_{C3}^2 A_3$$

$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} + x_{C2} y_{C2} A_2 + I_{xy3} + x_{C3} y_{C3} A_3$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 2. preuzeto sa [Otpornost materijala (vts.edu.rs)](vts.edu.rs) **(3/5)**



Odrediti momente inercije za ose x i y

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 cm^4$$

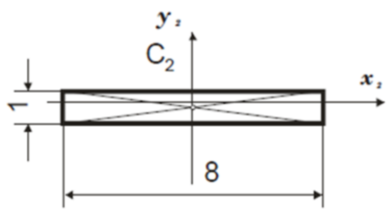
$$I_{y1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{1^3 \cdot 12}{12} = 1 cm^4$$

$$I_{x1y1} = 0 \, cm^4$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 2. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) (4/5)

Odrediti momente inercije za ose x i y



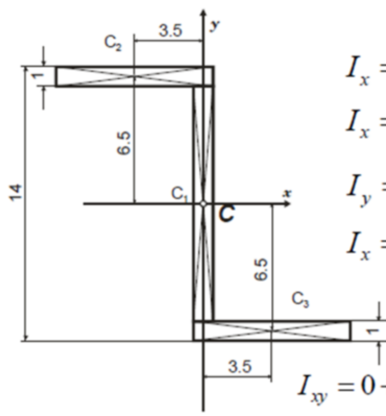
$$I_{x2} = I_{x3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 1^3}{12} = 0.66\, cm^4$$

$$I_{y2} = I_{y3} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{8^3 \cdot 1}{12} = 42.66\ cm^4$$

$$I_{x2y2} = I_{x3y3} = 0\ cm^4$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 2. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(5/5)**



Odrediti momente inercije za ose x i y

$$I_x = 144 + 0.66 + 6.5^2 8 + 0.66 + 6.5^2 8$$

$$I_x = 822\, cm^4$$

$$I_y = 1 + 42.66 + 3.5^2 8 + 42.66 + 3.5^2 8$$

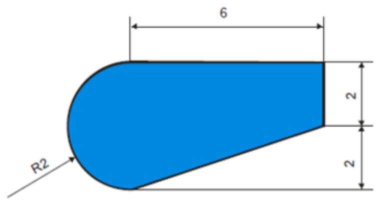
$$I_x = 282\, cm^4$$

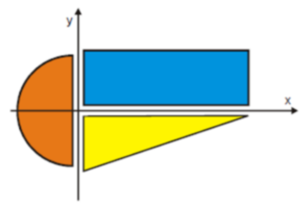
$$I_{xy} = 0 + 0 + (-3.5) \cdot 6.5 \cdot 8 + 0 + 3.5 \cdot (-6.5) \cdot 8$$

$$I_{xy} = -364\, cm^4$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

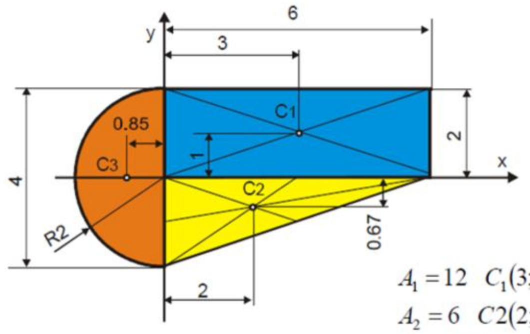
Primer 3. **preuzeto sa** Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(1/7)**





Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa [Otpornost materijala (vts.edu.rs)] **(2/7)**



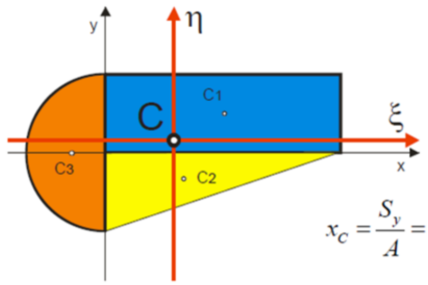
$A_1 = 12 \quad C_1(3;1)$

$A_2 = 6 \quad C2(2;-0.67)$

$A_3 = 6{,}28 \quad C_1(-0.85;0)$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa [Otpornost materijala (vts.edu.rs)](vts.edu.rs) (3/7)

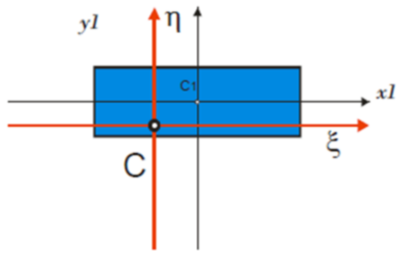


$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{42.66}{24.28} = 1.75\,cm$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{7.98}{24.28} = 0.32\,cm$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa [Otpornost materijala (vts.edu.rs)](vts.edu.rs) **(4/7)**



$$A_1 = 12\,cm^2 \quad C_1(1.24;0.67)$$

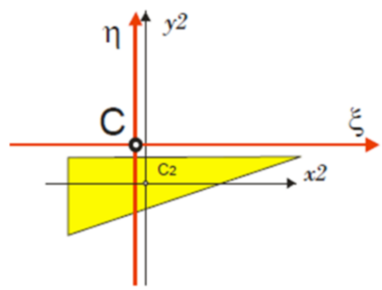
$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6\cdot 2^3}{12} = 4\,cm^4$$

$$I_{y1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{6^3\cdot 2}{12} = 36\,cm^4$$

$$I_{x1y1} = 0$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) (5/7)



$$A_2 = 6\,cm^2 \quad C_1(0.24;.-1)$$

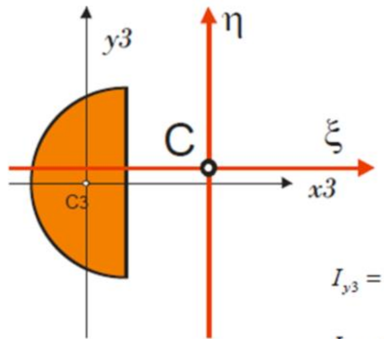
$$I_{x2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 2^3}{36} = 1.33\,cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{b^3 h}{36} = \frac{6^3 \cdot 2}{36} = 12\,cm^4$$

$$I_{x2y2} = -\frac{b^2h^2}{72} = -\frac{6^2 \cdot 2^2}{72} = 2\,cm^4$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(6/7)**



$$A_1 = 6.28\,cm^2 \quad C_1(-2.61;0)$$

$$I_{x3} = \frac{r^4\pi}{8} = \frac{2^4\pi}{8} = 6.28\,cm^4$$

$$I_{y3} = \frac{r^4}{72\pi}\left(9\pi^2 - 64\right) = \frac{2^4}{72\pi}\left(9\pi^2 - 64\right) = 1.76\,cm^4$$

$$I_{x3y3} = 0$$

Primeri izračunavanja momenata inercije složenih poprečnih preseka

Primer 3. preuzeto sa Otpornost materijala (vts.edu.rs) **(7/7)**

$$I_\xi = I_{x1} + \eta_1^2 A_1 + I_{x2} + \eta_2^2 A_2 + I_{x3} + \eta_3^2 A_3$$

$$I_\xi = 4 + 5.38 + 1.33 + 6 + 6.28 = 23\ cm^4$$

$$I_\eta = I_{y1} + \xi_1^2 A_1 + I_{y2} + \xi_2^2 A_2 + I_{y3} + \eta_3^2 A_3$$

$$I_\eta = 36 + 18.45 + 12 + 0.34 + 42.78 + 1.75 = 111.3\ cm^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{x1y1} + \xi_1 \eta_1 A_1 + I_{x2y2} + \xi_2 \eta_2 A_2 + I_{x3y3} + \xi_3 \eta_3 A_2$$

$$I_{\xi\eta} = 0 + 1.24 \cdot 0.67 \cdot 12 + 2 - 0.24 \cdot 6 \cdot 1 + 0 + 6.28 \cdot (-2.61) \cdot 0 = 10.53\ cm^4$$

Kontrolna pitanja 11

1. Definisati statičke momente ravnog preseka za ose Dekartovog koordinatnog sistema $0xy$.
2. Koja osa se naziva centralnom/težišnom/sopstvenom? Kolika je vrednost statičkog momenta ravnog preseka za centralnu osu?
3. Definisati momente inercije ravnog preseka za ose Dekartovog koordinatnog sistema $0xy$.
4. Dokazati Štajnerovu teoremu o momentima inercije za paralelne ose od kojih je jedna centralna.